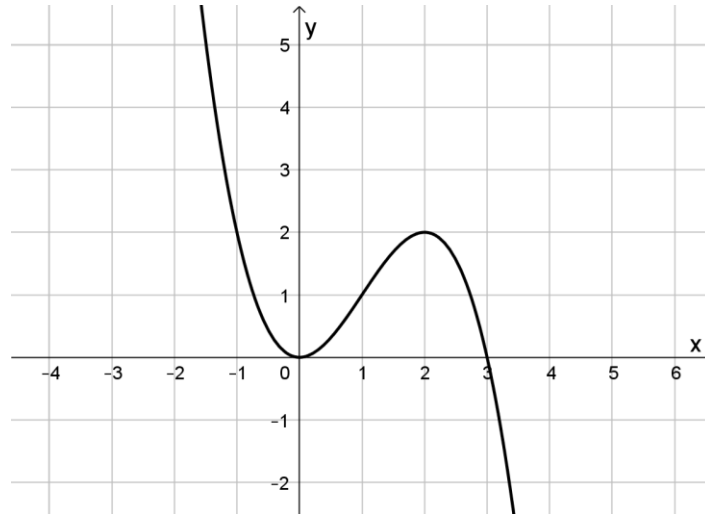


Krümmung und Wendepunkte Übung

1. Lesen Sie am Graphen von $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2$ den Wendepunkt sowie die Krümmungsintervalle ab. Bestätigen Sie Ihre Entscheidung durch Rechnung. •••



2. Bestimmen Sie die größtmöglichen Krümmungsintervalle folgender Funktionen. Geben Sie auch die Koordinaten aller Wendepunkte an. •••

a) $f(x) = x^3 - 2x + 1$

b) $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x$

c) $f(x) = -\frac{1}{12}(x^4 - 8x^3 + 48x + 24)$

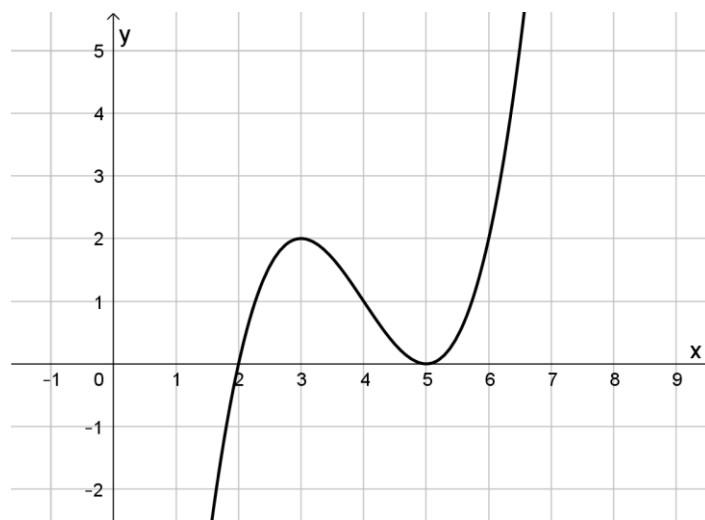
d) $f(x) = \frac{1}{10}x^5 - 3x^3 + 2x - 6$

3. Die folgende Tabelle zeigt, auf zwei Nachkommastellen gerundet, die Funktionswerte sowie der Werte der zweiten und dritten Ableitung der ganzrationalen Funktion f vierten Grades. Entnehmen Sie die Koordinaten aller Wendepunkte. •••

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	-44,08	-38	-26,75	-15,33	-6,75	-2	-0,08	2	9,25	28,67	69,25
f''(x)	12	5	0	-3	-4	-3	0	5	12	21	32
f'''(x)	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	10	12

4. Begründen Sie anhand der Funktion $f(x) = x^4$, dass die Bedingung $f''(x_0) = 0$ nicht ausreichend für die Existenz eines Wendepunkts ist. •••

5. Beweisen Sie, dass jede ganzrationale Funktion dritten Grades $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (es ist $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$) einen Wendepunkt besitzt. Bestätigen Sie ferner, dass c und d unerheblich für die Wendestelle x_W sind und dass gilt: $x_W = -\frac{b}{3a}$. •••
6. Die Existenz einer Wendestelle x_0 kann nachgewiesen werden durch die beiden Kriterien $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$.
Zeigen Sie, dass diese Kriterien nicht ausreichen, um den Wendepunkt der Funktion $f(x) = \frac{1}{10}x^5$ zu bestätigen. •••
7. Folgender Graph zeigt die zweite Ableitung $f''(x)$ der ganzrationalen Funktion f . Entnehmen Sie dem Schaubild die maximalen Krümmungsintervalle sowie die Wendestellen der Funktion f . •••



8. Bestimmen Sie die Wendetangente der Funktion f mit dem Term $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 + \frac{7}{2}x + 2$. •••

Krümmung und Wendepunkte

Lösung

1. Der Wendepunkt des Graphen liegt bei WEP(1; 1).
Der Graph von f ist linksgekrümmt im Bereich $] - \infty; 1]$ und rechtsgekrümmt in $[1; \infty[$.
Es ist $f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 3x$ und $f''(x) = -3x + 3$. Offensichtlich gilt $f''(1) = 0$. Da es sich bei $x_1 = 1$ um eine einfach Nullstelle von $f''(x)$ handelt, liegt ein Vorzeichenwechsel vor, also handelt es sich tatsächlich um eine Wendestelle. Einsetzen in $f(x)$ liefert den entsprechenden Wendepunkt: $f(1) = 1$, also WEP(1; 1). Weitere Nullstellen von $f''(x)$ liegen nicht vor.

2.

a) G_f ist rechtsgekrümmt in $] - \infty; 0]$ und linksgekrümmt in $[0; \infty[$.
WEP(0; 1)

b) G_f ist rechtsgekrümmt in $] - \infty; 3]$ und linksgekrümmt in $[3; \infty[$.
WEP(3; 3)

c) $f'(x) = -\frac{1}{12}(4x^3 - 24x^2 + 48)$
und $f''(x) = -\frac{1}{12}(12x^2 - 48x) = -x^2 + 4x = -x(x - 4)$.
 G_f ist rechtsgekrümmt in $] - \infty; 0]$ bzw. $[4; \infty[$ und linksgekrümmt in $[0; 4]$.
Wendepunkte WEP₁(0; -2) und WEP₂(4; $\frac{10}{3}$)

d) $f'(x) = \frac{1}{2}x^4 - 9x^2 + 2$ und $f''(x) = 2x^3 - 18x = 2x(x - 3)(x + 3)$.

x	$x < -3$	$-3 < x < 0$	$0 < x < 3$	$x > 3$
$f''(x)$	-	+	-	+
G_f	rechtsgekrümmt	linksgekrümmt	rechtsgekrümmt	linksgekrümmt

G_f ist rechtsgekrümmt in $] - \infty; -3]$ bzw. $[0; 3]$
und linksgekrümmt in $[-3; 0]$ bzw. $[3; \infty[$.
WEP₁(-3; 44,7) und WEP₂(3; -56,7)

3. Hinweis: Es handelt sich hier um die Funktionswerte von
 $f(x) = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 3x - 2$. Es existieren die beiden Wendepunkte
WEP₁(-3; -26,75) und WEP₂(1; -0,08).

4. Für $f(x) = x^4$ ist $f'(x) = 4x^3$ und $f''(x) = 12x^2$.
Die einzige Nullstelle von $f''(x)$ lautet $x_1 = 0$, allerdings gilt $f''(x) > 0$ für alle anderen Werte von x . Folglich besitzt $f''(x)$ keine Vorzeichenwechsel an der Stelle $x_1 = 0$ und damit auch keinen Wendepunkt.

5. Die zweite Ableitungsfunktion von $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ lautet $f''(x) = 6ax + 2b$. Die beiden Summanden, die c und d beinhalten, fallen beim Ableiten weg und sind daher für die Wendestelle unerheblich. Da es sich bei $f''(x)$ um eine lineare Funktion mit $a \neq 0$ handelt, besitzt diese stets eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel bei $x_W = -\frac{2b}{6a} = -\frac{b}{3a}$.

6. $f'(x) = -\frac{1}{2}x^4$
 $f''(x) = -2x^3$
 $f'''(x) = 6x^2$

$f''(x)$ hat die einzige Nullstelle bei $x_1 = 0$, allerdings ist auch $f'''(0) = 0$.

Dass es sich trotzdem um einen Wendepunkt handelt, kann man mit Hilfe einer Vorzeichentabelle zeigen.

x	$x < 0$	$x > 0$
$f''(x)$	+	-

7.

x	$x < 2$	$2 < x < 5$	$x > 5$
$f''(x)$	-	+	+
G_f	rechtsgekrümmt	linksgekrümmt	linksgekrümmt

Der Graph G_f ist rechtsgekrümmt in $] -\infty; 2]$ und linksgekrümmt in $[2; \infty[$.

Ein Wendepunkt liegt vor bei $x_1 = 2$.

Bei $x_2 = 5$ kein Wendepunkt, da hier zwar eine Nullstelle von $f''(x)$, aber kein Vorzeichenwechsel vorliegt.

8. Für $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 + \frac{7}{2}x + 2$ ist

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 + 6x + \frac{7}{2} \text{ und } f''(x) = 3x + 6.$$

Der Wendepunkt liegt bei $WEP(-2; 3)$.

Die Wendetangente besitzt die Gleichung $g(x) = -2,5x - 2$.